Кажется вероятным, что этот результат можно распространить на функционалы $c_{2n}(\Omega)$ для произвольного $n \in \mathbb{Z}$. Но к настоящему времени удалось подтвердить эту гипотезу лишь частично. А именно, нами доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $n \in \mathbb{Z}$*, и пусть* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *— область с максимальным модулем* $M(\Omega)$*. Если* $M(\Omega) = \infty$*, то* $c_{2n}(\Omega) = 0$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 17–01–00282.

Литература

1. Rellich F. *Perturbation theory of eigenvalue problems.* – New York-London-Paris: Gordon and Breach, 1969.

2. Caldiroli P., Musina R. *Rellich inequalities with weights* // Calc. Var. – 2012. – V. 45. – P. 147-164.

3. Carleson L., Gamelin T. W. *Complex dynamics.* – New-York: Springer, 1993.

4. Avkhadiev F. G., Wirths K.-J. *Schwarz-Pick type inequalities* – Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser Verlag, 2009.

5. Balinsky A. A., Evans W. D., Lewis R. T. *The Analysis and Geometry of Hardy's Inequality.* – Universitext, Heidelberg - New York - Dordrecht - London: Springer, 2015.

6. Avkhadiev F. G. *Hardy-Rellich inequalities in domains of the Euclidean space* // J. Math. Anal. Appl. – 2016. – V. 442. – P. 469-484.

GENERALIZATIONS OF A RELLICH INEQUALITY WITH WEIGHTS

F.G. Avkhadiev

We determine some special functionals as sharp constants in integral inequalities for test functions, defined on plane domains. We prove analogs and generalizations of a classical Rellich result for two dimensional case, when there is an additional restriction on Fourier coefficients of the test functions.

Keywords: Rellich inequality, conformal mapping, uniformly perfect sets.

УДК 517.968

ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОЕКЦИОННЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДРОБНО–ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ю.Р. Агачев[1], А.Ф. Галимянов[2]

1 *jagachev@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

2 *anis_59@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

В статье решается задача оптимизации полиномиальных проекционных методов решения периодических уравнений с дробно-интегральным оператором Вейля в главной части. Для класса регуляризованных интегральных уравнений дробного порядка, задаваемых принадлежностью коэффициентов фиксированному классу Гельдера, в паре пространств гельдеровых функций доказана оптимальность по порядку точности известных методов: Галеркина по тригонометрической системе функций, коллокации *и подобластей по равноотстоящим узлам. Отсюда, как следствие, вытекает оптимальность указанных методов и в соответствующем классе интегральных уравнений с дробно-интегральным оператором Вейля в главной части.*

Ключевые слова: дробно–интегральное уравнение, проекционный метод, полиномиальное приближение, оптимизация по порядку точности.

К настоящему времени задача оптимизации по порядку точности прямых и проекционных методов [1] решена для ряда классов регулярных и сингулярных интегральных уравнений. Однако, в случае дробно–интегральных уравнений такая задача до сих пор еще не исследовалась. Причиной, по-видимому, является некорректная постановка по Адамару задачи решения таких уравнений. Мы здесь даем решение задачи оптимизации по порядку точности для одного класса периодических интегральных уравнений с дробным интегралом Вейля в главной части.

Рассматривается задача оптимизации полиномиальных проекционных методов решения класса периодических дробно–интегральных уравнений вида

$$K\varphi \equiv \gamma + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \Psi_{\pm}^{\alpha}(x-t)\varphi(t)\,dt + \int\limits_0^{2\pi} g(x,t)\varphi(t)\,dt = f(x), \quad -\infty < x < \infty, \tag{1}$$

где α $(0 < \alpha < 1)$ – заданное число, $f(x), g(x,t)$ – известные 2π-периодические функции, $\gamma \in \mathbb{R}^1$ и φ – искомые числовой параметр и 2π-периодическая функция. Функция

$$\Psi_{\pm}^{\alpha}(t) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kt \mp \alpha\pi/2)}{k^{\alpha}}$$

задает дробно–интегральный оператор J, определяемый дробным интегралом Вейля (см., напр., [2, с. 264]) порядка α:

$$J\varphi \equiv \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \Psi_{\pm}^{\alpha}(x-t)\varphi(t)\,dt.$$

Пусть $C \equiv C_{2\pi}$ есть пространство непрерывных 2π−периодических функций с обычной max-нормой $\|\cdot\|_C$. Обозначим через H_δ $(0 < \delta \le 1)$ пространство 2π−периодических функций, удовлетворяющих условию Гельдера с показателем $\delta > 0$, с нормой

$$\|\varphi\|_\delta = \|\varphi\|_C + H(\varphi;\delta),$$

где $H(\varphi;\delta)$ – наименьшая постоянная Гельдера. Через $H_{0,\delta}$ будем обозначать подпространство пространства H_δ функций $f(x)$, для которых

$$\int\limits_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0.$$

Как известно (см., напр., [2, с. 275]), при $0 < \beta < 1-\alpha$ оператор J изоморфно отображает $H_{0,\beta}$ на $H_{0,\alpha+\beta}$. Поэтому далее будем считать, что $\beta > 0$ удовлетворяет условию $\alpha + \beta < 1$.

Класс $\mathbb{E}$ однозначно разрешимых уравнений (1) будем задавать классами: $\mathbb{F} = \{f\}$ функций из H_λ, $\alpha+\beta<\lambda\le 1$ и $\mathbb{G} = \{g\}$ функций из $H_\lambda \times L_1$, ограниченных в метрике $C \times L_1$ абсолютной положительной постоянной M.

Введем в рассмотрение два пространства: $\Phi = H_{0,\beta}\times\mathbb{R}^1$, $F = H_{\alpha+\beta}$. Норму в Φ зададим формулой $\|\overline{\varphi}\|_\Phi = |\gamma| + \|\varphi\|_\beta$, где $\overline{\varphi} = (\varphi;\gamma) \in \Phi$. Введем в рассмотрение оператор $\overline{J}$, определяемый по формуле

$$\overline{J}\overline{\varphi} \equiv \gamma + J\varphi, \quad \overline{\varphi} = (\varphi;\gamma) \in \Phi.$$

Тогда уравнение (1) в паре пространств (Φ, F) можно записать в операторной форме

$$\overline{K}\overline{\varphi} \equiv \overline{J}\overline{\varphi} + G\varphi = f \quad (\overline{\varphi} = (\varphi;\gamma) \in \Phi,\ f \in F). \tag{1’}$$

В [3] доказано, что в паре пространств (Φ, F) уравнение $(1')$ корректно поставлено по Адамару.

Пусть P_n есть произвольно фиксированный оператор из множества $\mathbb{P}_n$ операторов проектирования F на $F_n = \mathbf{H}_n^T$, где $\mathbf{H}_n^T$ – множество тригонометрических полиномов порядка не выше n, а $\Phi_n = \{\overline{\varphi}_n = (\varphi_n;\gamma_n) \in F_n \times \mathbb{R}^1\}$. Тогда проекционный метод решения уравнения $(1')$ из класса $\mathbb{E}$, определяемый оператором P_n, задается уравнением

$$\overline{K}_n\overline{\varphi}_n \equiv P_n\overline{K}\overline{\varphi}_n = P_n f \quad (\overline{\varphi}_n \in \Phi_n, P_n \in \mathbb{P}_n). \tag{2}$$

Решение $(\varphi^*, \gamma^*) \in \Phi$ уравнения $(1')$ из класса $\mathbb{E}$ будем аппроксимировать решениями $(\varphi_n^*, \gamma_n^*) \in \Phi_n \subset \Phi$ уравнений (2) из класса $\mathbb{E}_n$, определяемого множеством $\mathbb{P}_n$. При этом за оптимальную оценку погрешности класса $\mathbb{E}_n$ проекционных методов (2) на классе $\mathbb{E}$ уравнений $(1')$ примем величину [1, с. 40]

$$V_n(\mathbb{E}) = \inf_{P_n\in\mathbb{P}_n} \sup_{e\in\mathbb{E}} \|\overline{\varphi}^* - \overline{\varphi}_n^*\|_\Phi.$$

Рассмотрим уравнение

$$\overline{K}_n^\circ\overline{\varphi}_n^\circ \equiv P_n^\circ\overline{K}\overline{\varphi}_n^\circ = P_n^\circ f \quad (\overline{\varphi}_n^\circ \in \Phi_n, P_n^\circ \in \mathbb{P}_n). \tag{2°}$$

Определение [1, с. 40]. *Если элемент $\overline{\varphi}_n^\circ = (P_n^\circ\overline{K})^{-1}P_n^\circ f$, где $P_n^\circ \in \mathbb{P}_n$, удовлетворяет условию*

$$\sup\{\|\overline{\varphi}^* - \overline{\varphi}_n^\circ\|_\Phi : e \in \mathbb{E}\} \asymp V_n(\mathbb{E}),$$

то проекционный метод (2°) *называется оптимальным по порядку среди всех проекционных методов вида (2) на классе $\mathbb{E}$ уравнений* $(1')$.

Справедливы следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть $\mathbb{P}_n$ есть множество проекционных операторов P_n. Тогда для оптимальной оценки погрешности на классе $\mathbb{E}$ уравнений $(1')$ верна порядковая оценка*

$$V_n(\mathbb{E}) \asymp \frac{\ln n}{n^{\lambda-\alpha-\beta}}.$$

Теорема 2. *Пусть $\mathbb{P}_n$ есть множество проекционных операторов, $P_n^\circ \in \mathbb{P}_n$ обладает свойством $\|P_n\|_{C\to C} = O(\ln n)$. Тогда решение $\overline{\varphi}_n^\circ = (P_n^\circ\overline{K})^{-1}P_n^\circ f$ уравнения (2°) обладает свойством:*

$$\sup\{\|\overline{\varphi}^* - \overline{\varphi}_n^\circ\|_\Phi : e \in \mathbb{E}\} \asymp \frac{\ln n}{n^{\lambda-\alpha-\beta}}.$$

Следствие. В условиях теоремы 2 среди всевозможных полиномиальных проекционных методов вида (2) метод (2°) оптимален по порядку точности на классе $\mathbb{E}$ уравнений $(1')$.

Теорема 3. *На классе $\mathbb{E}$ однозначно разрешимых в паре пространств (Φ, F) уравнений $(1')$ оптимальными по порядку точности методами являются:*

1) метод Галеркина, построенный по тригонометрической системе функций;

2) метод коллокации, построенный по узлам $x_k = 2k\pi/(2n+1), k = \overline{0,2n}$;

3) метод подобластей, построенный по точкам $x_k = 2k\pi/(2n+1), k = \overline{0,2n+1}$.

Замечания. 1. Следует отметить, что эти результаты сохраняются, если пространство Φ задается условием $\int\limits_0^{2\pi} \varphi(x)\,dx = d$, где d – фиксированное вещественное число.

2. Теоремы 1–3 на классе однозначно разрешимых в паре (Φ, F) дробно–интегральных уравнений (1) позволяют построить полиномиальные проекционные методы (в частности, вычислительные схемы методов Галеркина, коллокации и подобластей), обладающие соответствующим свойством оптимальности по порядку точности.

Литература

1. Габдулхаев Б. Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1980. – 232 с.

2. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. А. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

3. Agachev J. R., Galimyanov A. F. *On Justification of General Polynomial Projection Method for Solving Periodic Fractional Integral Equations* // Lobachevskii J. Math. – 2015. – V. 36, No. 2. – P. 97–102.

ON OPTIMAL PROJECTION METHODS FOR SOLVING
PERIODIC FRACTIONAL-INTEGRAL EQUATIONS

J.R. Agachev, A.F. Galimjanov

We consider the solution for the problem of polynomial projection methods for solving periodic equations with a fractional-integral Weyl operator in the principal part. The optimality is proved in the order of accuracy for a class of regularized integral equations of fractional order. In this case the coefficients belong to a fixed Hoelder class in a pair of spaces of Hoelder functions. The optimality is proved on the trigonometric system of functions for the Galerkin method and on equidistant nodes for the methods of collocation and subdomains. Hence, as a consequence, the optimality of these methods also follows in the corresponding class of integral equations with a fractional-integral Weyl operator in the principal part.

Keywords: fractional-integral equation, projection method, polynomial approximation, optimization in order of accuracy.